Zentralsymmetrische statische Schwerefelder mit Räumen der Klasse 1

M. Kohler und K. L. Chao

Institut für Theoretische Physik A der Technischen Hochschule Braunschweig

(Z. Naturforschg. **20 a**, 1537—1543 [1965]; eingegangen am 22. September 1965)

Einbettungsfragen wurden in der Relativitätstheorie bisher selten betrachtet, da sich sofort die Frage nach der physikalischen Natur der Variablen des Einbettungsraumes stellt. Es gibt aber Fälle, wo sich das Einbettungsproblem von selbst stellt, das sind die Räume der Klasse 1, mit dem Rang $\geqq 3$ der 2. Fundamentalform $b_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$, da dann der 2. Fundamentaltensor $b_{\alpha\beta}$ aus der Metrik bestimmbar und der $b_{\alpha\beta}$ ein Tensor des Schwerefeldes wird. Behandelt sind nur zentralsymmetrische, statische Linienelemente, wo der Rang von $b_{\alpha\beta}$ gleich 4 ist. In diesem Fall folgen die Codazzi-Gleichungen aus jenen von Gauss und brauchen nicht explizit berücksichtigt zu werden. Die Komponenten des Riemann–Christoffelschen Tensors und die $b_{\alpha\beta}$ lassen sich in nichtrationaler Weise durch jene des Einstein-Tensors $G_{\alpha\beta}$ ausdrücken, wobei sich gewisse Bedingungen für die $G_{\alpha\beta}$ ergeben, damit reelle Werte für die anderen Tensoren folgen. Die Anwendung auf das Schwerefeld einer Flüssigkeitskugel ergibt 2 Lösungen der Klasse 1, wobei eine davon die Innenlösung von Schwarzschild ist. Im letzten Abschnitt wird schließlich gezeigt, daß die Einbettung im 5-dimensionalen pseudoeuklidischen Raum dieselben Formeln für die $b_{\alpha\beta}$ liefert, die vorher ohne Bezugnahme auf die Einbettung gewonnen wurden.

Bekanntlich lassen sich gekrümmte Räume in euklidische bzw. pseudoeuklidische Räume genügend hoher Dimensionszahl einbetten. Unter der Klasse eines Riemannschen Raumes versteht man die kleinste mögliche Differenz der Dimensionszahlen des ebenen Einbettungsraumes und des betrachteten gekrümmten Raumes. Ein Raum der Klasse 0 ist ein solcher, in dem sämtliche Komponenten des Riemann–Christoffelschen Tensors 4. Stufe verschwinden. Ein Raum der Klasse 1 der allgemeinen Relativitätstheorie läßt sich in einem 5-dimensionalen pseudoeuklidischen Raum geeigneter Signatur einbetten. Mit speziellen Räumen dieser Art beschäftigt sich die vorliegende Arbeit.

Einbettungsfragen wurden in der allgemeinen Relativitätstheorie bisher wenig betrachtet, da sich sofort die Frage nach der physikalischen Natur der hinzukommenden Variablen des Einbettungsraumes stellt. Einsteins Theorie bezieht sich ausschließlich auf Eigenschaften der 4-dimensionalen Räume, die aus der Metrik bestimmbar sind. Im Spezialfall der gekrümmten Flächen des gewöhnlichen 3-dimensionalen euklidischen Raumes, die sämtlich von der Klasse 0 oder 1 sind, ist die Gausssche Krümmung die einzige „innere" Krümmungsgröße, während z. B. die mittlere Krümmung eine äußere Eigenschaft ist, die erst entsteht, wenn man an die Einbettung im 3-dimensionalen Raum denkt. Zu der Metrik der Fläche tritt der 2. Fundamentaltensor zur Charakterisierung der Fläche. Ähnlich, wenn auch viel komplizierter, sind die Verhältnisse bei der Einbettung der 4-dimensionalen Räume der Relativitätstheorie. Der Einbettungsalgorithmus verlangt zur Charakterisierung eines solchen Raumes der Klasse N neben der Metrik $g_{\alpha\beta}$ genau N symmetrische Tensoren 2. Stufe $b^{(n)}_{\alpha\beta}$ $(n=1, 2, \ldots, N)$ und $\frac{1}{2}\, N(N-1)$ Vektoren, zwischen deren Komponenten eine große Zahl von Differentialgleichungen bestehen. Im Falle der Klasse $N=1$ hat man neben $g_{\alpha\beta}$ nur einen einzigen 2. Fundamentaltensor $b_{\alpha\beta}$ zu betrachten, so daß die Theorie dieser Räume besonders einfach wird. Sind bei einem 4-dimensionalen Raum der Klasse 1 die beiden Tensoren $g_{\alpha\beta}$ und $b_{\alpha\beta}$ bekannt, wobei gewisse Integrabilitätsbedingungen zwischen diesen Größen zu erfüllen sind, so ist die 4-dimensionale Fläche in einem pseudoeuklidischen 5-dimensionalen Raum geeigneter Signatur bis auf eine Translation, Drehung oder Spiegelung bestimmt. Wichtig ist, daß $g_{\alpha\beta}$ und $b_{\alpha\beta}$ als Tensoren des Raum-Zeit-Kontinuums auftreten. Ihre Komponenten sind nur Funktionen der Raum-Zeit-Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4. Wesentlich ist nun die Aussage der Einbettungstheorie, daß für einen Typ von Räumen der Klasse 1 der Tensor $b_{\alpha\beta}$ der 2. Fundamentalform (bis auf das Vorzeichen) eindeutig aus den Komponenten des Riemann–Christoffelschen Tensors $R_{\alpha\beta\mu\nu}$, also aus den $g_{\alpha\beta}$ bestimmbar wird. Für diese Räume hat die Matrix $\| b_{\alpha\beta} \|$ den Rang $\geqq 3$. Dies folgt aus der Unverbiegbarkeit solcher Räume und ist bedingt durch die höhere Dimensionszahl. In solchen Räumen, die im folgenden ausschließlich betrachtet werden, wird der Tensor $b_{\alpha\beta}$ aus den Gravitationspotentialen $g_{\alpha\beta}$ berechenbar, d. h., die metrischen Größen bestimmen auch die Einbettungseigenschaften. Der Tensor $b_{\alpha\beta}$ ist daher auch ein „innerer“ Tensor, der ohne explizite Bezugnahme auf den Einbettungsraum definiert werden kann. Interessant ist dabei, daß die Einbettungsfrage sich dann von selbst stellt und aus dem Studium innerer Größen beantwortbar wird.

Die folgenden Untersuchungen beschränken sich auf das Studium zentralsymmetrischer statischer Räume der Klasse 1. Zu ihnen gehört nicht die SCHWARZSCHILDsche Lösung des Massenpunktes, da von KASNER [1] bewiesen wurde, daß es für den materiefreien Fall keine Lösung der EINSTEINschen Feldgleichungen von der Klasse 1 gibt. Dagegen entspricht das Schwerefeld einer Flüssigkeitskugel einem Raum der Klasse 1, wie neuerdings von ROSEN [2] gezeigt wurde.

I. Allgemeines über Räume der Klasse 1 und zentralsymmetrische Linienelemente

Zwischen dem symmetrischen Tensor $b_{\alpha\beta}$ und dem RIEMANN–CHRISTOFFELschen Tensor bestehen für einen Raum der Klasse 1 die Beziehungen

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = e(b_{\alpha\mu}\, b_{\beta\nu} - b_{\alpha\nu}\, b_{\beta\mu}), \qquad (1)$$

wobei e gleich $+1$ oder -1 sein kann. Dies sind die sogen. GAUSSschen Gleichungen. Zu ihnen treten die CODAZZI-Gleichungen:

$$b_{\alpha\beta;\gamma} - b_{\alpha\gamma;\beta} = 0\,. \qquad (1\,\mathrm{a})$$

Hierbei bedeutet das Semikolon die gewöhnliche kovariante Ableitung. Von THOMAS [3] ist nun gezeigt worden, daß die CODAZZI-Gleichungen eine Folge der GAUSS-Gleichungen sind, wenn der Rang des Tensors $b_{\alpha\beta}$ größer oder gleich 4 ist. Im Fall von 4 Dimensionen heißt dies, daß der Rang von $b_{\alpha\beta}$ gleich 4 sein muß. Dies wird in der Folge stets vorausgesetzt. Dann braucht man die CODAZZI-Gleichungen (1 a) nicht mehr zu berücksichtigen. Nun sei

$$\Delta(\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu) = \begin{vmatrix} b_{\alpha\lambda} & b_{\alpha\mu} & b_{\alpha\nu} \\ b_{\beta\lambda} & b_{\beta\mu} & b_{\beta\nu} \\ b_{\gamma\lambda} & b_{\gamma\mu} & b_{\gamma\nu} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$$

ein beliebiger Minor der Determinante $|b_{\alpha\lambda}|$. Ist $\bar{b}_{\alpha\lambda}$ der Kofaktor von $b_{\alpha\lambda}$ in $\Delta(\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu)$, so gilt nach einem bekannten Determinantensatz

$$\Delta^2(\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu) = \begin{vmatrix} \bar{b}_{\alpha\lambda} & \bar{b}_{\alpha\mu} & \bar{b}_{\alpha\nu} \\ \bar{b}_{\beta\lambda} & \bar{b}_{\beta\mu} & \bar{b}_{\beta\nu} \\ \bar{b}_{\gamma\lambda} & \bar{b}_{\gamma\mu} & \bar{b}_{\gamma\nu} \end{vmatrix} = \bar{\Delta}(\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu)\,. \qquad (3)$$

Die rechtsstehende Determinante läßt sich nun sofort mit Hilfe der Gln. (1) ausdrücken, da

$$\bar{b}_{\alpha\lambda} = b_{\beta\mu}\, b_{\gamma\nu} - b_{\beta\nu}\, b_{\gamma\mu} = e\, R_{\beta\gamma\mu\nu} \quad \text{usw.}$$

Es ergibt sich so:

$$\Delta^2 = e \begin{vmatrix} R_{\alpha\beta\lambda\mu} & R_{\alpha\beta\mu\nu} & R_{\alpha\beta\nu\lambda} \\ R_{\beta\gamma\lambda\mu} & R_{\beta\gamma\mu\nu} & R_{\beta\gamma\nu\lambda} \\ R_{\gamma\alpha\lambda\mu} & R_{\gamma\alpha\mu\nu} & R_{\gamma\alpha\nu\lambda} \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Da die linke Seite nicht negativ sein kann für reelle Räume, folgt, daß

$$e \begin{vmatrix} R_{\alpha\beta\lambda\mu} & R_{\alpha\beta\mu\nu} & R_{\alpha\beta\nu\lambda} \\ R_{\beta\gamma\lambda\mu} & R_{\beta\gamma\mu\nu} & R_{\beta\gamma\nu\lambda} \\ R_{\gamma\alpha\lambda\mu} & R_{\gamma\alpha\mu\nu} & R_{\gamma\alpha\nu\lambda} \end{vmatrix} \geqq 0 \qquad (5)$$

für beliebige Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$.

Nach einem weiteren Determinantensatz ist jedes Element von $\Delta(\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu)$ multipliziert mit $\Delta(\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu)$ gleich dem Kofaktor des entsprechenden Elementes der Determinante $\bar{\Delta}(\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu)$. Es ist also

$$\Delta(\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu)\; b_{\alpha\lambda} = \begin{vmatrix} \bar{b}_{\beta\mu} & \bar{b}_{\beta\nu} \\ \bar{b}_{\gamma\mu} & \bar{b}_{\gamma\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_{\gamma\alpha\nu\lambda} & R_{\gamma\alpha\lambda\mu} \\ R_{\alpha\beta\nu\lambda} & R_{\alpha\beta\lambda\mu} \end{vmatrix}$$

oder

$$b_{\alpha\lambda} = \frac{1}{\Delta(\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu)} \begin{vmatrix} R_{\gamma\alpha\nu\lambda} & R_{\gamma\alpha\lambda\mu} \\ R_{\alpha\beta\nu\lambda} & R_{\alpha\beta\lambda\mu} \end{vmatrix},$$

$$b_{\alpha\mu} = \frac{1}{\Delta(\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu)} \begin{vmatrix} R_{\gamma\alpha\lambda\mu} & R_{\gamma\alpha\mu\nu} \\ R_{\alpha\beta\lambda\mu} & R_{\alpha\beta\mu\nu} \end{vmatrix}, \qquad (6\,\mathrm{a})$$

wobei nach (4)

$$\Delta(\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu) = \left\{ e \begin{vmatrix} R_{\alpha\beta\lambda\mu} & R_{\alpha\beta\mu\nu} & R_{\alpha\beta\nu\lambda} \\ R_{\beta\gamma\lambda\mu} & R_{\beta\gamma\mu\nu} & R_{\beta\gamma\nu\lambda} \\ R_{\gamma\alpha\lambda\mu} & R_{\gamma\alpha\mu\nu} & R_{\gamma\alpha\nu\lambda} \end{vmatrix} \right\}^{1/2}. \qquad (6\,\mathrm{b})$$

Damit sind die Komponenten des 2. Fundamentaltensors $b_{\alpha\lambda}$ durch die Komponenten des RIEMANN–CHRISTOFFELschen Tensors ausgedrückt. Die Lösung (6) für die $b_{\alpha\lambda}$ ist insofern noch nicht eindeutig, als das Vorzeichen der Wurzel in (6 b) offenbleibt. Die Bedingungen (5) garantieren, daß die $b_{\alpha\lambda}$ reell werden. Da e in (5) gleich $+1$ oder -1 ist, besagen die Bedingungen (5), daß alle Determinanten der linken Seite von (5) das gleiche Vorzeichen haben sollen. Der Rang von $b_{\alpha\lambda}$ soll voraussetzungsgemäß

[1] E. KASNER, Amer. J. Math. **43**, 126 [1921].
[2] J. ROSEN, Nuovo Cim. **38**, 631 [1965].
[3] T. Y. THOMAS, Acta Math. **67**, 169 [1936].

4 sein. Wir entwickeln die Determinante $|b_{\alpha\lambda}|$ nach zweireihigen Minoren mit Hilfe des LAPLACEschen Entwicklungssatzes und erhalten

$$\begin{aligned}|b_{\alpha\lambda}| = \; & R_{2112}\,R_{4334} - R_{2113}\,R_{2443} - R_{2334}\,R_{2114} \\ & - R_{3221}\,R_{3441} - R_{1224}\,R_{1334} + (R_{1234})^2.\end{aligned} \tag{7 a}$$

Weitere solche Entwicklungen nach anderen Zeilenpaaren liefern

$$\begin{aligned}|b_{\alpha\lambda}| = \; & R_{1331}\,R_{4224} - R_{2113}\,R_{2443} - R_{3114}\,R_{3224} \\ & - R_{1332}\,R_{1442} - R_{1224}\,R_{1334} + (R_{1234})^2,\end{aligned} \tag{7 b}$$

$$\begin{aligned}|b_{\alpha\lambda}| = \; & R_{3223}\,R_{4114} - R_{3221}\,R_{3441} - R_{1332}\,R_{1442} \\ & - R_{3114}\,R_{3224} - R_{2334}\,R_{2114} + (R_{1234})^2.\end{aligned} \tag{7 c}$$

Die drei Ausdrücke (7 a), (7 b) und (7 c) müssen einander gleich sein, außerdem wird verlangt, daß sie alle drei von Null verschieden sind. Dies entspricht der Forderung, daß $b_{\alpha\lambda}$ den Rang 4 haben soll.

Nun betrachten wir das allgemeine zentralsymmetrische, statische Linienelement:

$$ds^2 = A^2\,dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2) - V^2\,dx_4^2, \tag{8}$$

wo A und V nur Funktionen von r sind. Für die Komponenten des RIEMANN–CHRISTOFFELschen Tensors findet man

$$\begin{aligned}P_{23} &= R^{32}{}_{23} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{A^2} - 1\right),\\ P_{12} &= R^{21}{}_{12} = -\frac{A'}{r\,A^3} = R^{13}{}_{31} = P_{31},\\ P_{14} &= R^{41}{}_{14} = \frac{1}{A^2}\left(\frac{V''}{V} - \frac{A'\,V'}{A\,V}\right),\\ P_{24} &= R^{42}{}_{24} = \frac{V'}{r\,A^2\,V} = R^{43}{}_{34} = P_{34}.\end{aligned} \tag{9}$$

Alle Komponenten mit 3 und mehr verschiedenen Indizes sind Null. Die Indizes 1, 2, 3, 4 entsprechen der Reihe nach den Koordinaten r, ϑ, φ, x_4. Entsprechend findet man für die Komponenten des EINSTEIN-Tensors

$$\begin{aligned}G_1{}^1 &= -\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{A^2} - 1\right) - \frac{2\,V'}{r\,A^2\,V},\\ G_2{}^2 = G_3{}^3 &= \frac{1}{A^2}\left(\frac{A'}{r\,A} + \frac{A'\,V'}{A\,V} - \frac{V'}{r\,V} - \frac{V''}{V}\right),\\ G_4{}^4 &= -\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{A^2} - 1\right) + \frac{2\,A'}{r\,A^3},\\ G_\alpha{}^\beta &= 0 \quad \text{für} \quad \alpha \neq \beta.\end{aligned} \tag{10}$$

Aus den Formeln (7) folgen nach (9) die Gleichungen

$$|b_{\alpha\lambda}| = R_{2112}\,R_{4334} = R_{1331}\,R_{4224} = R_{3223}\,R_{4114}. \tag{11}$$

Da $|b_{\alpha\lambda}|$ nicht verschwinden soll, besagen diese Gleichungen, daß keine der Komponenten $R_{\alpha\beta\beta\alpha}$ $(\alpha \neq \beta)$ verschwinden darf. Setzt man die aus (9) folgenden Ausdrücke für die $R_{\alpha\beta\beta\alpha}$ in (11) ein, so ergibt sich als einzige Gleichung

$$\left(1 - \frac{1}{A^2}\right)V'' = \frac{A'}{A}V'. \tag{12}$$

Diese Gleichung läßt sich sofort einmal integrieren und es folgt

$$V'^2 = k^2(A^2 - 1). \tag{13}$$

Hier gibt es die beiden Möglichkeiten:

a) $\quad V'^2 = k^2(A^2 - 1) \quad$ mit $\quad A > 1,$ (14 a)

b) $\quad V'^2 = k^2(1 - A^2) \quad$ mit $\quad 0 < A < 1.$ (14 b)

(k ist eine positive Konstante.)

Der letzte Ausdruck wird aus (13) erhalten, indem man k durch $i\,k$ ersetzt. Bei der Anwendung der Formeln (6 a) und (6 b) zur Berechnung der $b_{\alpha\beta}$ sind die Indizes α, β, γ, λ, μ, ν so zu wählen, daß $\Delta(\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu) \neq 0$ wird. Dies ist der Fall für $\lambda = \alpha$, $\mu = \beta$, $\nu = \gamma$. Es folgt

$$\Delta(\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma) = \sqrt{-e\,R_{\alpha\beta\beta\alpha}\,R_{\beta\gamma\gamma\beta}\,R_{\gamma\alpha\alpha\gamma}}.$$

Dieser Ausdruck ist symmetrisch gegenüber einer Vertauschung von α und β, β und γ sowie γ und α. Dann folgt aus (6 a)

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta(\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma)}\begin{vmatrix} R_{\gamma\alpha\alpha\beta} & R_{\gamma\alpha\beta\gamma} \\ R_{\alpha\beta\alpha\beta} & R_{\alpha\beta\beta\gamma}\end{vmatrix} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \neq \beta.$$

Der Tensor $b_{\alpha\beta}$ ist also gleichzeitig mit $g_{\alpha\beta}$ und $G_{\alpha\beta}$ sowie $R_{\alpha\beta}$ auf Hauptachsen.

Mit (14 a) und (14 b) lassen sich die Ausdrücke (9) für die $P_{\alpha\beta}$ vereinfachen. Man kann folgende Darstellungen finden:

Fall a):

$$\begin{aligned}P_{23} &= -\frac{A^2 - 1}{r^2\,A^2} = -\frac{V'^2}{k^2\,r^2\,A^2} < 0,\\ P_{12} &= -\frac{A'}{r\,A^3} = -\frac{V'\,V''}{k^2\,r\,A^4},\\ P_{14} &= \frac{V''}{A^4\,V}, \qquad P_{24} = \frac{V'}{r\,A^2\,V}.\end{aligned} \tag{15 a}$$

Fall b):

$$\begin{aligned}P_{23} &= \frac{1 - A^2}{r^2\,A^2} = \frac{V'^2}{k^2\,r^2\,A^2} > 0,\\ P_{12} &= \frac{V'\,V''}{k^2\,r\,A^4},\\ P_{14} &= \frac{V''}{A^4\,V}, \qquad P_{24} = \frac{V'}{r\,A^2\,V}.\end{aligned} \tag{15 b}$$

In beiden Fällen ist $P_{12} = P_{31}$ und $P_{24} = P_{34}$.

Nachdem wir wissen, daß die Nichtdiagonalglieder von $b_{\alpha\beta}$ verschwinden, gehen wir auf die Gln. (1) zurück, die jetzt lauten:

$$R_{\alpha\beta\beta\alpha} = -e\, b_{\alpha\alpha}\, b_{\beta\beta}\,, \qquad (\alpha \neq \beta)$$

oder $R^{\beta\alpha}{}_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} = -e\, b_\alpha{}^\alpha\, b_\beta{}^\beta$ (nicht summieren). Ausführlich geschrieben:

$$P_{23} = -e\, b_2{}^2 b_3{}^3,\; P_{31} = -e\, b_3{}^3 b_1{}^1,\; P_{12} = -e\, b_1{}^1 b_2{}^2,$$
$$P_{14} = -e\, b_1{}^1 b_4{}^4,\; P_{24} = -e\, b_2{}^2 b_4{}^4,\; P_{34} = -e\, b_3{}^3 b_4{}^4. \tag{16}$$

Aus den Gleichungen $P_{12} = P_{31}$ und $P_{24} = P_{34}$ folgt sofort $b_2{}^2 = b_3{}^3$. Damit wird aber

$$P_{23} = -e(b_2{}^2)^2.$$

Da alle $b_\alpha{}^\alpha$ reell sein sollen, folgt daraus

$$P_{23} < 0 \text{ für } e = 1 \quad \text{und} \quad P_{23} > 0 \text{ für } e = -1.$$

Vergleicht man dies aber mit den Ausdrücken (15 a) und (15 b) für P_{23}, so ergibt sich, daß Fall a) dem Wert $e=1$ zuzuordnen ist und Fall b) dem Wert $e=-1$. Es sind also für $e=1$ die Formeln (14 a) und (15 a) zu nehmen und für $e=-1$ die Formeln (14 b) und (15 b).

Aus (16) folgt

$$b_2{}^2 = b_3{}^3 = \sqrt{-e\,P_{23}}\,,\; b_1{}^1 = -e\frac{P_{12}}{b_2{}^2}, \quad b_4{}^4 = -e\frac{P_{24}}{b_2{}^2};$$
$$P_{14} = -e\frac{P_{12}\,P_{24}}{(b_2{}^2)^2}. \tag{17 a}$$

Daraus ergibt sich zunächst

$$P_{12}\,P_{24} = P_{23}\,P_{14} \tag{17 b}$$

in Übereinstimmung mit (11). Weiter erhält man

Fall a): $e=1, \quad P_{23}<0, \quad A>1;$

$$b_2{}^2 = b_3{}^3 = \frac{V'}{k\,r\,A}, \quad b_1{}^1 = \frac{V''}{k\,A^3}, \quad b_4{}^4 = -\frac{k}{A\,V}. \tag{18 a}$$

Fall b): $e=-1, \quad P_{23}>0, \quad 0<A<1;$

$$b_2{}^2 = b_3{}^3 = \frac{V'}{k\,r\,A}, \quad b_1{}^1 = \frac{V''}{k\,A^3}, \quad b_4{}^4 = \frac{k}{A\,V}. \tag{18 b}$$

Damit ist die Berechnung des 2. Fundamentaltensors aus der Metrik durchgeführt. Die $b_\alpha{}^\beta$ hängen in nichtrationaler Form von den Komponenten des RIEMANN–CHRISTOFFELschen Tensors ab.

Zwischen den Komponenten des RIEMANN–CHRISTOFFELschen Tensors bestehen bekanntlich die BIANCHI-Identitäten:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} = 0\,. \tag{19 a}$$

Ihre Auswertung ergibt im Falle des Linienelementes (8) zwei Beziehungen:

$$P'_{23} + \frac{2}{r}(P_{23} - P_{12}) = 0\,.$$
$$P'_{24} + \left(\frac{1}{r} + \frac{V'}{V}\right)P_{24} - \frac{V'}{V}P_{12} - \frac{1}{r}P_{14} = 0\,. \tag{19 b}$$

Aus den Gln. (1 a) für die $b_{\alpha\beta}$ folgt durch Verjüngung

$$(b_\alpha{}^\beta - b\,\delta_\alpha{}^\beta)_{;\beta} = 0\,, \qquad b = b_\sigma{}^\sigma. \tag{20}$$

Der in der Klammer stehende symmetrische Tensor $b_\alpha{}^\beta - b\,\delta_\alpha{}^\beta$ ist also divergenzfrei, wie der Materietensor $T_\alpha{}^\beta$. Die Divergenzfreiheit beider Tensoren beruht auf den BIANCHI-Identitäten.

II. Zusammenhänge zwischen den Komponenten des Riemann–Christoffelschen Tensors und dem Einstein-Tensor

Der physikalisch wichtigste Tensor ist der EINSTEINsche, definiert durch $G_\alpha{}^\beta = R_\alpha{}^\beta - \frac{1}{2}R\,\delta_\alpha{}^\beta$. Er läßt sich durch Verjüngung aus $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ finden. Umgekehrt sind aber im allgemeinen Falle die Komponenten von $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ nicht durch jene von $G_{\alpha\beta}$ festgelegt, da $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ 20 algebraisch unabhängige Komponenten hat und $G_{\alpha\beta}$ nur 10. Im Falle des Linienelementes (8) gibt es 4 solcher Komponenten von $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ und 3 von $G_{\alpha\beta}$, also lassen sich auch in diesem Falle die $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ nicht algebraisch durch die $G_{\alpha\beta}$ ausdrücken. Dies wird anders bei Räumen der Klasse 1, da dann zwischen den vier Größen P_{23}, P_{12}, P_{14} und P_{24} die Beziehung (17 b) besteht. Durch diese Gleichung sind nun die Komponenten von $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ algebraisch ausdrückbar durch jene von $G_{\alpha\beta}$. Man findet zunächst das Linienelement (8)

$$\varepsilon_1 = G_1{}^1 = -P_{23} - 2\,P_{24}\,,$$
$$\varepsilon_2 = G_2{}^2 = G_3{}^3 = -P_{12} - P_{24} - P_{12}\,P_{24}/P_{23}\,, \tag{21}$$
$$\varepsilon_4 = G_4{}^4 = -P_{23} - 2\,P_{12}\,.$$

Diese drei Gleichungen für die drei Größen P_{23}, P_{12}, P_{24} kann man auflösen und erhält

$$P_{23} = -\tfrac{1}{6}\left[\varepsilon_1 - 4\,\varepsilon_2 + \varepsilon_4 \pm \sqrt{(\varepsilon_1 - 4\,\varepsilon_2 + \varepsilon_4)^2 + 12\,\varepsilon_1\,\varepsilon_4}\right], \tag{22 a}$$

$$P_{12} = -\tfrac{1}{2}(\varepsilon_4 + P_{23}),$$
$$P_{24} = -\tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 + P_{23}), \tag{22 b}$$
$$P_{14} = P_{12}\,P_{24}/P_{23}\,.$$

Damit sind für das Linienelement (8) unter Voraussetzung der Klasse 1 die Komponenten des RIEMANN–CHRISTOFFELschen Tensors ausgedrückt durch jene des EINSTEIN-Tensors. Da die $P_{\alpha\beta}$ reell sind, erhalten wir eine Forderung an die Komponenten von $G_{\alpha\beta}$. Es muß gelten

$$(\varepsilon_1 - 4\,\varepsilon_2 + \varepsilon_4)^2 + 12\,\varepsilon_1\,\varepsilon_4 \geqq 0. \tag{23}$$

Dies ist eine notwendige Forderung an die Komponenten des EINSTEIN-Tensors, damit der RIEMANNsche Raum von der Klasse 1 und von dem von uns betrachteten Typ sein kann.

Da P_{23} im ganzen Raum dasselbe Vorzeichen haben muß, entstehen dadurch weitere Einschränkungen für ε_1, ε_2 und ε_4. Wenn sich zwei brauchbare Lösungen für P_{23} aus (22 a) ergeben, so gehören beide Lösungen zu $e = -1$, wenn für sie $P_{23} > 0$ oder beide zu $e = 1$, wenn für sie $P_{23} < 0$ gilt. Haben die zwei brauchbaren Lösungen für P_{23} entgegengesetzte Vorzeichen, so entspricht die eine dem Fall $e = 1$, die andere $e = -1$. Im Falle, wo sich nur eine brauchbare Lösung findet, kann sie zu $e = 1$ oder $e = -1$ gehören.

Aus diesen Ergebnissen folgt auch, daß das SCHWARZSCHILDsche Linienelement für den Massenpunkt nicht zu dem betrachteten Typ der Klasse 1 gehören kann, da aus $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 0$ nach den Formeln (22) sofort das Verschwinden der Komponenten des RIEMANN–CHRISTOFFELschen Tensors folgt und der Raum somit eben wäre.

Da durch (22) die $P_{\alpha\beta}$ durch ε_1, ε_2, ε_4 ausgedrückt sind, liefern die Formeln (17 a) durch Einsetzen die $b_{\alpha\beta}$ dargestellt durch ε_1, ε_2, ε_4 für die beiden Fälle $e = \pm 1$; so daß also die Komponenten des 2. Fundamentaltensors $b_{\alpha\beta}$ bis auf das Vorzeichen festgelegt sind durch jene des EINSTEIN-Tensors. Dabei können einem brauchbaren Satz von ε_1, ε_2, ε_4 zwei Sätze von reellen $b_{\alpha\beta}$-Größen entsprechen, die sich nicht nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

III. Schwerefeld einer Flüssigkeitskugel

Wir wollen die bisherigen Überlegungen anwenden auf den wichtigen Fall einer Flüssigkeitskugel, deren Energie-Impuls-Tensor gegeben ist durch

$$T_1{}^1 = T_2{}^2 = T_3{}^3 = p^*, \qquad T_4{}^4 = -\mu^*\,c^2 \qquad (p^*, \mu^* > 0)\,. \tag{24 a}$$

wo p^* und μ^* den invarianten Druck bzw. Massendichte bedeuten. Nach den EINSTEINschen Feldgleichungen ist (ohne kosmologisches Glied)

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varkappa\,p^*, \qquad \varepsilon_4 = \varkappa\,\mu^*\,c^2, \tag{24 b}$$

wo $\varkappa$ die Gravitationskonstante ist.

Die Bedingung (23) läßt sich im vorliegenden Fall so schreiben:

$$(\mu^*\,c^2 - 3\,p^*)^2 \geqq 0\,,$$

und ist stets erfüllt. Überdies läßt sich die Wurzel ausziehen. Aus den Formeln (22) folgt

$$\begin{aligned} P^{(+)}_{23} &= -\tfrac{1}{3}\,\varkappa\,\mu^*\,c^2 = P^{(+)}_{12}, \\ P^{(+)}_{24} &= \tfrac{1}{6}\,\varkappa(\mu^*\,c^2 + 3\,p^*) = P^{(+)}_{14}; \end{aligned} \tag{25 a}$$

$$\begin{aligned} P^{(-)}_{23} &= -\,\varkappa\,p^* = -P^{(-)}_{24}, \\ P^{(-)}_{12} &= -\tfrac{1}{2}\,\varkappa(\mu^*\,c^2 - p^*) = -P^{(-)}_{14}. \end{aligned} \tag{25 b}$$

Da μ^* und p^* überall dasselbe Vorzeichen haben, sind beide Lösungen brauchbar im Sinne des Abschnittes II und entsprechen beide dem Fall $e = 1$ nach (15 a).

Aus der ersten Gleichung von (19 b) folgt für die Lösung (25 a)

$$\mathrm{d}\mu^*/\mathrm{d}r = 0 \tag{26 a}$$

und aus $P^{(+)}_{23} = P^{(+)}_{12}$ nach (9)

$$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{A^2} - 1\right) = -\,\frac{A'}{A^3}. \tag{26 b}$$

Diese Gleichung läßt sich sofort integrieren und liefert

$$A^2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}\,\varkappa\,\mu^*\,c^2\,r^2} \qquad (\mu^* \text{ konstant}). \tag{27}$$

Die Lösung (25 a) entspricht der bekannten SCHWARZSCHILDschen für das Innere der Flüssigkeitskugel unter der Annahme von konstantem μ^*. Diese Lösung ist also von der Klasse 1 und dem Typ mit Rang 4.

Für die Lösung (25 b) folgt aus (15 a) die Differentialgleichung

$$V\,V' = k^2\,r\,,$$

die durch Integration ergibt

$$V^2 = K + k^2\,r^2 \qquad (K \text{ konstant}). \tag{28}$$

Weiter folgt aus den Beziehungen (15 a)

$$\begin{aligned} A^2 &= (K + 2\,k^2\,r^2)/(K + k^2\,r^2), \\ \varkappa\,p^* &= k^2/(K + 2\,k^2\,r^2)\,, \\ \varkappa\,\mu^*\,c^2 &= k^2(3\,K + 2\,k^2\,r^2)/(K + 2\,k^2\,r^2)^2. \end{aligned}$$

Diese Lösung entspricht einer veränderlichen Massendichte. Die Konstante K muß positiv sein, um

Vorzeichenwechsel von μ^* und p^* zu vermeiden. Eine Singularität tritt dann nur im Unendlichen auf.

Die b_α^β erhält man aus den Formeln (18 a). Für die Lösung (25 a) folgt

$$b_1{}^1 = b_2{}^2 = b_3{}^3 = \sqrt{\varkappa\,\mu^*\,c^2/3}, \quad b_4{}^4 = -k/(A\,V),$$

und für (25 b)

$$b_1{}^1 = V''/(k\,A^3), \quad b_2{}^2 = b_3{}^3 = -b_4{}^4 = \sqrt{\varkappa\,p^*}.$$

Die beiden Lösungen (25) zeichnen sich also durch eine einfache Struktur der 2. Fundamentalform aus.

IV. Einbettung der Felder in pseudoeuklidische Räume von 5 Dimensionen

Der 2. Fundamentaltensor $b_{\alpha\beta}$ wurde aus dem Gravitationsfeld vom speziellen Typ der Klasse 1 gefunden ohne explizite Bezugnahme auf die 5. Dimension. In den cartesischen Koordinaten des Einbettungsraumes y^1, y^2, y^3, y^4, y^5 lautet dessen Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = e_i (\mathrm{d}y^i)^2, \qquad i = 1, 2, \ldots, 5, \tag{29 a}$$

wo die $e_i = \pm 1$ sind. Die Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit erscheint als 4-dimensionale Hyperfläche:

$$y^i = \psi^i(x_1, x_2, x_3, x_4). \tag{29 b}$$

Deren Metrik ist dann gegeben durch

$$g_{\alpha\beta} = e_i\,\psi^i{}_{;\alpha}\,\psi^i{}_{;\beta}\,. \tag{29 c}$$

Das Semikolon bedeutet kovariante Ableitung im 4-dimensionalen Raum. Die Signatur von $g_{\alpha\beta}$ ist jene der speziellen Relativitätstheorie. Nun hat EISENAHRT [4] gezeigt, daß die Metrik des Einbettungsraumes mindestens soviele $+1$ und -1 hat wie die Metrik der Hyperfläche. Daher gibt es nur die beiden Möglichkeiten für den Einbettungsraum:

a) 4 der e_i sind 1 und das restliche ist -1;
b) 3 der e_i sind 1 und die beiden restlichen sind -1.

Wir schreiben

a) $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 1, \quad e_5 = -1;$
b) $e_1 = e_2 = e_3 = 1, \quad e_4 = e_5 = -1\,.$

Sind σ_i ($i = 1, 2, \ldots, 5$) die Komponenten des Normaleneinheitsvektors der Hyperfläche, so berechnet sich der 2. Fundamentaltensor aus der Gleichung

$$b_{\alpha\beta} = \sigma_i\,y^i{}_{,\alpha\beta}\,. \tag{30 a}$$

[4] L. P. EISENHART, Riemannian Geometry, Princeton University Press, Princeton, S. 188.

Das Komma bedeutet die partielle Ableitung. Es gilt

$$e_i\,\sigma_i{}^2 = e\,, \tag{30 b}$$

wo $e = \pm 1$ ist. Nullvektoren als Normalenvektoren sind auszuschließen, da dann die induzierte Metrik (29 c) entartet wäre.

Wir machen nun folgenden Ansatz:

$$y^1 = r\sin\vartheta\cos\varphi, \; y^2 = r\sin\vartheta\sin\varphi, \; y^3 = r\cos\vartheta,$$

und $y^4 = \dfrac{V(r)}{k}\operatorname{Cos}(k\,x_4)$, $y^5 = \dfrac{V(r)}{k}\operatorname{Sin}(k\,x_4)$ im Falle der Signatur a;

oder $y^4 = \dfrac{V(r)}{k}\cos(k\,x_4)$, $y^5 = \dfrac{V(r)}{k}\sin(k\,x_4)$ im Falle der Signatur b.

Wir erhalten dann

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + \frac{V'^2}{k^2}\right)\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2) - V^2\,\mathrm{d}x_4{}^2, \tag{31 a}$$

(Signatur a)

oder

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{V'^2}{k^2}\right)\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2) - V^2\,\mathrm{d}x_4{}^2. \tag{31 b}$$

(Signatur b)

Durch Vergleich mit (8) folgt

$$V'^2 = k^2(A^2 - 1) \quad \text{im Falle von (31 a)},$$
$$V'^2 = k^2(1 - A^2) \quad \text{im Falle von (31 b)}.$$

Dies entspricht den Formeln (14 a) und (14 b), die auf andere Weise gewonnen wurden.

Die Gleichung der Hyperfläche läßt sich so schreiben

$$(y^4)^2 - (y^5)^2 - V^2(r)/k^2 = 0\,, \quad \text{(Sign. a)}$$
$$(y^4)^2 + (y^5)^2 - V^2(r)/k^2 = 0\,, \quad \text{(Sign. b)}$$

mit

$$r^2 = (y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2.$$

Daraus folgt für die Komponenten des Normalenvektors

$$\sigma_m = -p\,\frac{V\,V'}{k^2\,r}\,y^m, \qquad m = 1, 2, 3$$
$$\sigma_4 = p\,\frac{V}{k}\operatorname{Cos}(k\,x_4),\; \sigma_5 = -p\,\frac{V}{k}\operatorname{Sin}(k\,x_4)\,; \quad \text{(Sign. a)}$$

und

$$\sigma_m = -\bar{p}\,\frac{V\,V'}{k^2\,r}\,y^m, \qquad m = 1, 2, 3$$
$$\sigma_4 = \bar{p}\,\frac{V}{k}\cos(k\,x_4), \quad \sigma_5 = \bar{p}\,\frac{V}{k}\sin(k\,x_4)\,. \quad \text{(Sign. b)}$$

Daraus folgt

$$e_i \sigma_i^2 = \frac{p^2 V^2}{k^2}\left(1 + \frac{V'^2}{k^2}\right) \qquad \text{(Sign. a)}$$

und

$$e_i \sigma_i^2 = \frac{\bar{p}^2 V^2}{k^2}\left(\frac{V'^2}{k^2} - 1\right). \qquad \text{(Sign. b)}$$

Im 1. Fall ist das Quadrat der Länge des Normalenvektors also positiv und wir können ihn auf $e=1$ normieren. Im 2. Fall ist das Quadrat der Länge negativ, da nach (31 b) der Ausdruck $g_{11} = 1 - V'^2/k^2$ positiv sein muß. Wir können im 2. Fall den Normalenvektor also auf $e = -1$ normieren. Es wird dann

$$p^2 = \frac{k^2}{V^2(1+V'^2/k^2)} = \frac{k^2}{A^2 V^2},$$
$$\bar{p}^2 = \frac{k^2}{V^2(1-V'^2/k^2)} = \frac{k^2}{A^2 V^2}.$$

Nun erhält man nach (30 a) für die $b_{\alpha\beta}$

$$b_{11} = \frac{V''}{k\,A}, \quad b_{22} = \frac{r\,V'}{k\,A}, \quad b_{33} = \frac{r\,V'}{k\,A}\sin^2\vartheta, \quad b_{44} = \frac{V}{k\,A}; \qquad \text{(Sign. a)}$$

$$b_{11} = \frac{V''}{k\,A}, \quad b_{22} = \frac{r\,V'}{k\,A}, \quad b_{33} = \frac{r\,V'}{k\,A}\sin^2\vartheta, \quad b_{44} = -\frac{V}{k\,A}, \qquad \text{(Sign. b)}$$

$$b_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta),$$

oder

$$b_1{}^1 = \frac{V''}{k\,A^3}, \quad b_2{}^2 = b_3{}^3 = \frac{V'}{k\,r\,A}, \quad b_4{}^4 = \mp\frac{k}{A\,V},$$
$$b_\alpha{}^\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta), \tag{32}$$

wobei im Ausdruck für $b_4{}^4$ das obere Vorzeichen für Signatur a) und das untere für Signatur b). Dies sind aber genau die Formeln (18).

Verallgemeinerte physikalische Entropien auf informationstheoretischer Grundlage

H. Schwegler

Lehrstuhl für Theoretische Festkörperphysik der Technischen Hochschule Darmstadt

(Z. Naturforschg. **20 a**, 1543—1553 [1965]; eingegangen am 13. Mai 1965)

Physical entropies S_B are defined with respect to a certain set of variables, the observation-level B. For all times in which B exists, S_B is the uncertainty H of a density operator $\mathcal{R}_B$ making H a maximum with respect to the experimental values of B. This definition is not restricted to the thermodynamic equilibrium. The entropies S_B measure the vagueness of the description in Hilbert-space caused by the choice of B. The time dependence of the density operator $\mathcal{R}_B$ is not governed by the von Neumann equation, but in the special case of a "self-consistent" B it may be calculated with the help of this equation. An increasing S_B is obtained.

If the times for which B exists are sufficiently close, a macroscopic equation for the time derivative of S_B is given. Three special cases of B are considered, leading to the Gibbs equation, a generalized entropy equation for heat conduction and an entropy equation for the multipole relaxation.

Der Anwendbarkeit informationstheoretischer Begriffe in der Physik ist in den letzten Jahren immer mehr Aufmerksamkeit geschenkt worden. So wird häufig darauf Bezug genommen, daß das Shannonsche Unschärfemaß H für die wichtigsten Ensembles der statistischen Thermodynamik des Gleichgewichts, nämlich das kanonische und das großkanonische Ensemble, als identisch mit der thermodynamischen Entropie betrachtet werden kann. Über Definition und Verhalten der Entropie im Nichtgleichgewicht herrscht dagegen weniger Klarheit. Die vorliegende Arbeit versucht, einen Beitrag zur Klärung der Schwierigkeiten zu liefern.

1. Konstruktion informationstheoretischer Ensembles

In einer Reihe von beachtenswerten Arbeiten hat Jaynes einen Zusammenhang zwischen Informationstheorie und statistischer Mechanik entwickelt; dies geschah mit Hilfe eines allgemein (auch über die Physik hinaus) anwendbaren Verfahrens, das es er-